9 класс. Ответы и решения

Задача 1 (1 балл). В коробке много конфет тёмного шоколада и еще больше конфет белого шоколада. Четыре случайные конфеты случайным образом поделили между Валей и Колей поровну. Известно, что вероятность того, что у обоих окажутся по одной тёмной и одной белой конфете, равна α, а вероятность того, что хотя бы у одного из них окажутся тёмная и белая конфеты, равна β. Найдите вероятность того, что у Вали окажутся две конфеты одного цвета.

Ответ: $1-\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Решение. Обозначим буквами B и K события «*у Вали разные конфеты*» и «*у Коли разные конфеты*» соответственно. Вероятности этих событий одинаковы в силу симметрии: $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(K)$. Из равенства

$$\mathrm{P}(B\cup K)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(K)-\mathrm{P}(B\cap K)$$

получаем:

$$\beta=2\mathrm{P}(B)-\alpha\ ;\ \ \mathrm{P}(B)=\frac{\alpha+\beta}{2};\ \ \mathrm{P}(\bar{B})=1-\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Задача 2 (1 балл). У папы есть коробка, в которой лежат одинаковые по размеру шары разных цветов: красного, жёлтого и синего. Вова собирается вынуть из коробки случайный шар. Он спрашивает папу: «Какого цвета шар мне вероятнее всего попадётся?» Папа отвечает: «Синего». Вова переспрашивает: «Значит, вероятнее всего, что мне попадётся синий шар?» «Нет, вероятнее всего, что синий шар тебе не попадётся», – отвечает папа. Какое наименьшее количество шаров может быть в коробке, если папа всегда говорит правду?

Автор задачи Геннадий Гусев, 6 класс

Ответ: 7.

Решение. Если шаров какого-то цвета нет (во время олимпиады были вопросы, может ли так быть), то указанная в условии ситуация невозможна. В коробке есть хотя бы по одному шару каждого цвета. Значит, синих шаров, по крайней мере, два.

Если синих шаров два, то желтых и красных должно быть по одному. Но в этом случае нарушается второе условие: вероятность вынуть синий шар оказывается не меньше, а равна вероятности вынуть не синий шар.

Если синих шаров три, то красных и желтых вместе должно быть хотя бы 4. Следовательно, наименьшее количество шаров не меньше чем 7.

Пример: три синих шара, два желтых и два красных удовлетворяют условию.

Задача 3. Кот Базилио предложил Буратино и Пьеро сыграть с ним в новую лотерею. Вначале Буратино и Пьеро вносят по 19 сольдо, а кот вносит 82 сольдо. Затем Буратино и Пьеро бросают по игральному кубику. Если число очков, выпавшее у Буратино, делится на число очков, выпавшее у Пьеро, то Буратино забирает свой выигрыш – в 20 раз больше сольдо, чем выходит в частном, а если не делится, то Буратино не получает ничего. Если число очков, выпавшее у Пьеро, делится на число очков, выпавшее у Буратино, то Пьеро забирает в 20 раз больше сольдо, чем выходит в частном, а если не делится, то не получает ничего. Деньги, оставшиеся после выплаты выигрышей Буратино и Пьеро, кот забирает себе. Кот утверждает, что игра честная, поскольку для каждого из троих игроков вероятность получить больше, чем игрок внёс вначале, одна и та же.

а) (1 балл) Верно ли, что вероятность получить больше первоначального взноса одна и та же для всех троих игроков?

б) (1 балл) Является ли игра честной с точки зрения среднего выигрыша, то есть верно ли, что математическое ожидание прибыли от лотереи равно 0 для каждого игрока?

Ответ: а) да; б) нет.

Решение. Суммарный взнос равен 120 сольдо. Пусть Буратино выбросил n очков, а Пьеро – k очков. Составим таблицу**,** в которой клетки соответствуют всем 36 возможным исходам бросков, а в клетках запишем выигрыши Буратино, Пьеро и Кота, разделив их наклонными чертами.

k \ ***n***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	20/20/80	40/0/80	60/0/60	80/0/40	100/0/20	120/0/0
2	0/40/80	20/20/80	0/0/120	40/0/80	0/0/120	60/0/60
3	0/60/60	0/0/120	20/20/80	0/0/120	0/0/120	40/0/80
4	0/80/40	0/40/80	0/0/120	20/20/80	0/0/120	0/0/120
5	0/100/20	0/0/120	0/0/120	0/0/120	20/20/80	0/0/120
6	0/120/0	0/60/60	0/40/80	0/0/120	0/0/120	20/20/80

Оранжевым цветом отмечены исходы, в которых Буратино получил больше 19 сольдо, а зеленым – исходы, в которых кот получил больше 82 сольдо. И тех, и других по 14. Следовательно, вероятности выигрыша Буратино и вероятность выигрыша кота одинаковы – по $\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$. Вероятность выигрыша Пьеро такая же, поскольку Буратино и Пьеро в равных условиях.

Математическое ожидание выигрыша кота равно

$$20\cdot\frac{2}{36}+40\cdot\frac{2}{36}+60\cdot\frac{4}{36}+80\cdot\frac{12}{36}+120\cdot\frac{14}{36}=\frac{20}{18}\cdot(1+2+6+24+42)=\frac{750}{9}=83\frac{1}{3}$$

сольдо, а это больше, чем взнос кота. Значит, математическое ожидание выигрыша у Буратино и у Пьеро меньше, чем их взносы. Игра нечестная.

Задача 4. Группа, в которой 27 студентов, сдает письменный зачёт по решению олимпиадных задач. Преподаватель заготовил зачётную работу в 3 вариантах и распределяет варианты случайным образом с единственным условием: количество тех, кто получил разные варианты, должно отличаться не больше чем на единицу. Перед зачётом между студентами Сергеем и Алексеем состоялся следующий диалог.

С: Вероятность того, что у нас с тобой окажется один и тот же вариант, равна 1/3.

А: Если сегодня кто-то один не придёт на зачёт, то она окажется меньше, чем была бы, если бы пришли все.

С: Если сегодня не придут двое, то она окажется меньше, чем была бы, если бы не пришёл кто-то один.

а) (1 балл) Верно ли первое утверждение Сергея?

б) (1 балл) Верно ли утверждение Алексея?

в) (1 балл) Верно ли второе утверждение Сергея?

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Решение. а) Пусть Сергей получил какой-то вариант. Тогда для Алексея вариантов с этим же номером остается меньше, чем треть общего числа оставшихся вариантов. Поэтому вероятность совпадения меньше, чем 1/3.

б) Если на зачёт придут все, то вероятность совпадения равна $\frac{8}{26}=\frac{4}{13}$. Если не придёт кто-то один, то варианты распределятся так: 9 студентов получили один вариант, еще 9 – другой вариант, и еще 8 – третий. В этом случае вероятность совпадения вариантов равна

$$\frac{9}{26}\cdot\frac{8}{25}+\frac{9}{26}\cdot\frac{8}{25}+\frac{8}{26}\cdot\frac{7}{25}=\frac{8\cdot 25}{26\cdot 25}=\frac{4}{13}.$$

Решение без вычислений. Можно считать, что отсутствующий студент все же пришёл, взял последний оставшийся вариант и ушёл с ним — для Сергея и Алексея ничего не изменилось.

в) Если не придут двое, то варианты распределятся так: 9, 8 и 8. Вероятность совпадения равна

$$\frac{9}{25}\cdot\frac{8}{24}+\frac{8}{25}\cdot\frac{7}{24}+\frac{8}{25}\cdot\frac{7}{24}=\frac{8\cdot 23}{25\cdot 24}=\frac{23}{75}<\frac{4}{13}.$$

Решение почти без вычислений: если бы все тянули варианты наугад, и два листка в остались бы в конце, то вероятность события «*С. и А. получат один и тот же вариант*» была бы $\frac{4}{13}$. Случай, когда остались два одинаковых варианта, более благоприятен для того, чтобы А. и С. получили одинаковые варианты, потому что $2\cdot 9\cdot 8+7\cdot 6>9\cdot 8+2\cdot 8\cdot 7$. Но этот случай невозможен по условию, значит, вероятность совпадения вариантов у С. и А. меньше $\frac{4}{13}$.

Задача 5 (2 балла). В случайном эксперименте 8 элементарных событий, и все они равновозможны. Пусть M – множество всех событий этого опыта, кроме невозможного (пустого) события. Событие $A \in M$ имеет вероятность 0,75. Сколько в множестве M случайных событий B таких, что события A и B независимы?

Ответ: 41.

Решение. Пусть события A и B независимы. Тогда $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$. Если событию B благоприятствует b, а событию $A \cap B$ благоприятствует c элементарных событий, то получается равенство $0,75 \cdot \frac{b}{8} = \frac{c}{8}$, откуда $3b = 4c$.

Учитывая, что числа b и c натуральные и что $c \le b \le 8$ и $c \le 6$, получаем два варианта.

1. $b = 8, c = 6$, т. е. событие B достоверное.

2. $b = 4, c = 3$. То есть событию B благоприятствуют 3 из 6 элементарных событий, входящих в A, и одно из двух, не входящих в A. Выбрать такое подмножество элементарных событий можно $C_6^3 \cdot C_2^1 = 40$ способами. Всего получается 41 событие.

Задача 6 (3 балла). Имеются два несимметричных игральных кубика. Известно, что:

- вероятность выпадения 1 очка на первом кубике равна 0,14;
- вероятность выпадения 1 очка на втором кубике равна 0,35;
- при всех n от 2 до 6 отношение вероятности выпадения n очков к вероятности выпадения $n-1$ очков на первом кубике в точности в $\frac{n}{n-1}$ раз больше, чем это же отношение для второго кубика.

Найдите математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании второго кубика.

Ответ: 2,5.

Решение. Пусть вероятности граней на первом и на втором кубиках равны $v_1, \ldots, v_6$ и $k_1, \ldots, k_6$ соответственно. Тогда

$$\frac{v_2}{v_1} = 2\frac{k_2}{k_1}, \text{ откуда } v_2 k_1 = 2 v_1 k_2,$$

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{v_3}{v_2}\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{2}\frac{k_3}{k_2} \cdot 2\frac{k_2}{k_1} = 3\frac{k_3}{k_1}, \text{ откуда } v_3 k_1 = 3 v_1 k_3.$$

Таким же образом получаем все равенства $v_n k_1 = n v_1 k_n$ при $n = 2, \ldots, 6$. Сложим полученные равенства почленно:

$$v_1 \left(2k_2 + 3k_3 + \ldots + 6k_6\right) = k_1 \left(v_2 + v_3 + \ldots + v_6\right).$$

Добавим к обеим частям $v_1 k_1$:

$$v_1 \left(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots + 6k_6\right) = k_1 \left(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_6\right).$$

Математическое ожидание числа очков на втором кубике равно

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots + 6k_6 = \frac{k_1}{v_1}\left(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_6\right) = \frac{k_1}{v_1} = 2,5.$$

Авторы задач: *Геннадий Глебов (6-й класс), Н.И.Сошитова, П.В.Семенов, А.В.Шкляев, И.Р.Высоцкий.*